

Zur Stabilität des elastischen Rotorblattes

Kaiser, Gottfried
Koch, Karl Heinz

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 9, 1957,
S.189-201



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Zur Stabilität des elastischen Rotorblattes

Von G. Kaiser und K. H. Koch

Hannover¹⁾

Vorgelegt von A. Pflüger

Übersicht: Es wird die Stabilität der selbsterregten Schlagschwingungen eines elastischen Hubschrauber-Rotorblattes im Vorwärtsflug behandelt. Die Bewegungsgleichung wird für das Ersatzsystem einer Schwingerkette aus starren, durch Federgelenke verbundenen Teilstücken aufgestellt. Eine Aussage über die Stabilität ist durch eine numerische Rechnung in Matrizenform möglich, die eine Verfeinerung der aerodynamischen und mechanischen Annahmen zuläßt. Für ein einfaches Beispiel werden Rechengang und Ergebnis mitgeteilt.

Summary: This paper deals with the transient stability of the flapping motion of a flexible helicopter rotor blade in forward flight. The equation of flapping motion is developed for the substituted system of rigid parts connected by elastic flapping hinges. It is possible to investigate the stability by computations based upon matrix equations which permit the refinement of aerodynamic and mechanic assumptions. The solution and results are given for a simple example.

1. Einleitung

Bei allen Untersuchungen der Eigenschlagschwingungen gelenkig angeschlossener Rotorblätter werden gewisse vereinfachende Annahmen getroffen, die eine beschränkte Gültigkeit der gewonnenen Ergebnisse zur Folge haben. So wird in [1] der Einfluß des Fortschrittsgrades auf die Stabilität vernachlässigt, in [2] werden die Rotorblätter als starr vorausgesetzt, oder es wird nur die erste Biegeschwingungsform berücksichtigt [3]. Diese Näherungen liefern jedoch gegenüber Versuchsergebnissen zu günstige Lösungen [3], [4].

In der folgenden Untersuchung wird das elastische Rotorblatt ersetzt durch eine Schwingerkette aus starren Teilstücken, die miteinander durch Federgelenke geeigneter Ersatzsteifigkeiten verbunden sind. Der Bewegungsablauf wird dann — wie sich zeigt — von einem System Hillscher Differentialgleichungen beschrieben.

Die über die Stabilität entscheidende Zahl läßt sich jedoch nicht allgemein in Abhängigkeit von sämtlichen Parametern angeben. Vielmehr muß die Zahlenrechnung für jede den Verhältnissen eines bestimmten Rotors und Betriebszustandes entsprechende Parameterzusammenstellung neu durchgeführt werden. Da diese Rechnungen im wesentlichen aus Matrizenmultiplikationen und -additionen erheblichen Umfangs bestehen, sind sie nur mit elektronischen Rechenmaschinen mit tragbarem Zeitaufwand zu bewältigen. Da diese Möglichkeit für die Verfasser zur Zeit noch nicht gegeben ist, wurde lediglich ein ein-

¹⁾ Mit Unterstützung des Bundesverkehrsministeriums und der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstandener Forschungsbericht des Instituts für Statik der Technischen Hochschule Hannover (Prof. Dr.-Ing. habil. A. Pflüger).

faches Beispiel für eine Parameterzusammenstellung mit einer elektrischen Tischrechenmaschine durchgerechnet¹⁾).

2. Annahmen

Das Blatt wird gegen Torsion als starr angenommen, der endliche Abstand des Schlaggelenkes von der Rotorachse wird vernachlässigt, eine Kopplung von Schlagwinkel und Anstellwinkel wird nicht berücksichtigt. Das Rotorblatt hat über die ganze Länge konstante Masse und Blattbreite.

Der Schlagwinkel wird als klein und $c_a' = \frac{\partial c_a}{\partial \gamma}$ als konstant eingeführt. Winkelgeschwindigkeit und Vorwärtsgeschwindigkeit und damit auch der Fortschrittsgrad sind ebenfalls konstant angesetzt. Der Einfluß der Rückanblasung des Blattes, die in einem gewissen Bereich des Azimutwinkels bei hohem Fortschrittsgrad eintritt, ist nicht berücksichtigt.

Diese in der vorliegenden Arbeit gemachten Annahmen können jedoch bei dem eingeschlagenen Lösungsweg — Einführung einer Schwingerkette — verhältnismäßig leicht erweitert werden: Anstellwinkel, Auftriebsbeiwert, Blattbreite und -masse brauchen nur stückweise konstant zu sein; veränderliche Winkelgeschwindigkeit des Rotors, veränderlicher Fortschrittsgrad und die bei großer Vorwärtsgeschwindigkeit wichtige Rückanblasung [4] können berücksichtigt werden.

3. Bezeichnungen

R [m]	Rotorblattlänge
r [m]	Veränderliche in Blattrichtung
v [m]	Vertikalverschiebung des Blattelementes
$x = \frac{r}{R}$ [—]	Dimensionslose Koordinaten
$y = \frac{v}{R}$ [—]	„ „
ξ [—]	Veränderliche in x-Richtung
τ [—]	Auf den Radius bezogene Blattbreite
c [mkg]	Federkonstante
m [kg sec ² m ⁻²]	Blattmasse per Längeneinheit
ρ [kg sec ² m ⁻⁴]	Luftdicke
α [—]	Knickwinkel in den Federgelenken
M [mkg]	Biegemomente in den Federgelenken
c_a [—]	Auftriebsbeiwert des Profils

¹⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Die Durchrechnung ganzer Parameterbereiche mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage wird z. Z. durchgeführt.

γ [—]	Anblaswinkel des Blattelementes
$c_a' = \frac{\partial c_a}{\partial \gamma}$ [—]	
ϑ [—]	Anstellwinkel des Blattelementes
β [—]	Schlagwinkel des Blattelementes
ω [sec ⁻¹]	Winkelgeschwindigkeit des Rotors
t [sec]	Zeit
$(\dots)' = \frac{\partial}{\partial t}$	
$(\dots)' = \frac{\partial}{\partial x}$	
$\psi = \omega t$ [—]	Azimutwinkel des Rotorblattes
$U = \omega R$ [m sec ⁻¹]	Umfangsgeschwindigkeit der Blattspitze
V [m sec ⁻¹]	Vorwärtsgeschwindigkeit
$\mu = \frac{V}{U}$ [—]	Fortschrittsgrad
$N + 1$ [—]	Anzahl der Gelenke der Schwingerkette
ν, ϱ [—]	Indizes zur Kennzeichnung der Gelenke
$d = x_{\nu+1} - x_\nu$ [—]	
$k = -c_a' \frac{\partial}{\partial \gamma} \tau U^2$ [kg m ⁻²]	

4. Ableitung der Bewegungsgleichungen

Es werde ein durch $N + 1$ Gelenke gegliedertes Rotorblatt betrachtet.

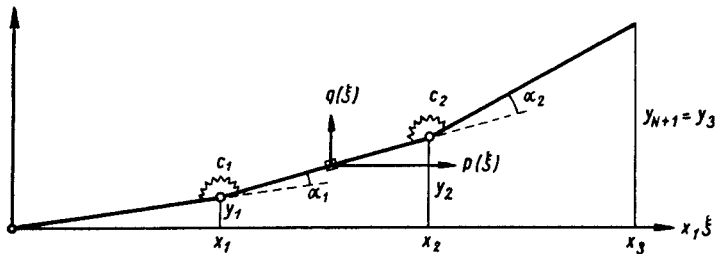


Abb. 1. Schwingerkette

Die Gelenke haben in einem beliebig ausgelenkten Zustand die Koordinaten x_ν, y_ν . Für das Biegemoment M im ν -ten Gelenk gilt mit den die Biege-

steifigkeit ersetzenden Federkonstanten c_v

$$M_v = c_v \alpha_v \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_v \neq 0 \text{ für } v = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

und aus Gleichgewichtsbedingungen mit den Luftkräften und *d'Alembertschen* Trägheitskräften

$$\begin{aligned} M_v &= R^2 \sum_{\varrho=v}^N \left\{ \int_{x_{\varrho}}^{x_{\varrho+1}} q(\xi) (\xi - x_v) d\xi - \int_{x_{\varrho}}^{x_{\varrho+1}} p(\xi) [y(\xi) - y(x_v)] d\xi \right\} \\ &= R^2 \sum_{\varrho=v}^N \left\{ \int_{x_{\varrho}}^{x_{\varrho+1}} q(\xi) (\xi - x_v) d\xi - \int_{x_{\varrho}}^{x_{\varrho+1}} p(\xi) \left[y(x_{\varrho}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\xi - x_{\varrho}) \frac{y(x_{\varrho+1}) - y(x_{\varrho})}{x_{\varrho+1} - x_{\varrho}} - y(x_v) \right] d\xi \right\} \end{aligned}$$

$$\text{mit } y_{\varrho} \leq y(\xi) \leq y_{\varrho+1} \text{ oder } y_{\varrho} \geq y(\xi) \geq y_{\varrho+1}$$

Mit den Trägheitskräften $m R \omega^2 \xi$ und $m R \ddot{y}$ gilt

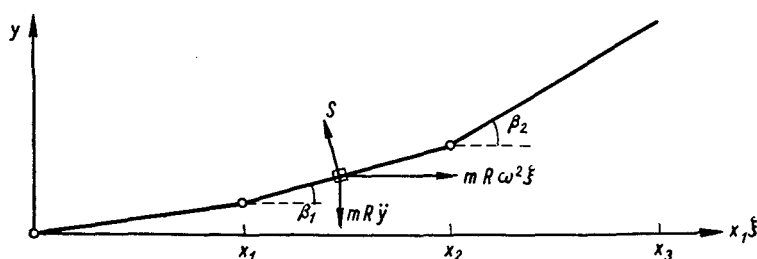


Abb. 2. Luft- und Trägheitskräfte

$$q(\xi) = -m R \ddot{y}(\xi, t) + S(\xi, t) \cos \beta(\xi, t),$$

$$\approx -m R \ddot{y}(\xi, t) + S(\xi, t),$$

$$p(\xi) = m R \omega^2 \xi - S(\xi, t) \sin \beta(\xi, t)$$

$$\approx m R \omega^2 \xi - S(\xi, t) \frac{y_{v+1} - y_v}{x_{v+1} - x_v}.$$

Es sollen hier nicht die erzwungenen, sondern nur die Eigenschwingungen der Blätter untersucht werden. Es wird daher nur der von y und seinen Ableitungen abhängige Anteil der Luftkräfte berücksichtigt. Im Rahmen der getroffenen Annahmen lautet dieser [1]:

$$S = k R \left[\dot{y}(\xi, t) \frac{1}{\omega} (\mu \sin \psi + \xi) + y'(\xi, t) \mu \left(\frac{\mu}{2} \sin 2\psi + \xi \cos \psi \right) \right]$$

$$\text{mit } k = -c_a' \frac{\varrho}{2} \tau U^2.$$

Daraus folgt innerhalb der Theorie erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{R^3} \left[\frac{y_{v+1} - y_v}{x_{v+1} - x_v} - \frac{y_v - y_{v-1}}{x_v - x_{v-1}} \right] = \\ \sum_{e=v}^N \left[\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ -m \left[\ddot{y}_e + (\xi - x_e) \frac{\ddot{y}_{e+1} - \ddot{y}_e}{x_{e+1} - x_e} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k}{\omega} \left[\dot{y}_e + (\xi - x_e) \frac{\dot{y}_{e+1} - \dot{y}_e}{x_{e+1} - x_e} \right] (\mu \sin \psi + \xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + k \mu \frac{y_{e+1} - y_e}{x_{e+1} - x_e} \left[\frac{\mu}{2} \sin 2\psi + \xi \cos \psi \right] \right\} (\xi - x_v) d\xi - \right. \\ \left. - \int_{x_e}^{x_{e+1}} m \omega^2 \xi \left\{ y_e + \frac{y_{e+1} - y_e}{x_{e+1} - x_e} (\xi - x_e) - y_v \right\} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Hierin sei

$$\frac{x_{e+1}^n - x_e^n}{n} = \Delta_e^n$$

gesetzt und integriert. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{R^3} \frac{y_{v+1} - 2y_v + y_{v-1}}{\Delta_v} = \sum_{e=v}^N \left[-m \left\{ \ddot{y}_e (\Delta_e^2 - \Delta_e x_v) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\ddot{y}_{e+1} - \ddot{y}_e}{\Delta_e} (\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v - \Delta_e^2 x_e + \Delta_e x_e x_v) \right\} + \frac{k}{\omega} \mu \sin \psi \times \right. \\ \left. \times \left[\dot{y}_e (\Delta_e^2 - \Delta_e x_v) + \frac{\dot{y}_{e+1} - \dot{y}_e}{\Delta_e} (\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v - \Delta_e^2 x_e + \Delta_e x_e x_v) \right] + \right. \\ \left. + \frac{k}{\omega} \left[\dot{y}_e (\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v) + \frac{\dot{y}_{e+1} - \dot{y}_e}{\Delta_e} (\Delta_e^4 - \Delta_e^3 x_v - \Delta_e^3 x_e + \Delta_e^2 x_e x_v) \right] + \right. \\ \left. + \frac{k \mu^2}{2} \sin 2\psi \frac{y_{e+1} - y_e}{\Delta_e} (\Delta_e^2 - \Delta_e x_v) + k \mu \cos \psi \frac{y_{e+1} - y_e}{\Delta_e} (\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v) \right. \\ \left. - m \omega^2 \left(y_e \Delta_e^2 + \frac{y_{e+1} - y_e}{\Delta_e} (\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_e) - y_v \Delta_e^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich nach y_e geordnet

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0 = & \sum_{e=v}^N \left\{ -m \ddot{y}_{e+1} \frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v - \Delta_e^2 x_e + \Delta_e x_e x_v}{\Delta_e} \right. \\
 & + m \ddot{y}_e \left[\frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v - \Delta_e^2 x_e + \Delta_e x_e x_v}{\Delta_e} - (\Delta_e^2 - \Delta_e x_v) \right] \\
 & + \frac{k}{\omega} \dot{y}_{e+1} \left[\mu \sin \psi \frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v - \Delta_e^2 x_e + \Delta_e x_e x_v}{\Delta_e} + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta_e^4 - \Delta_e^3 x_v - \Delta_e^3 x_e + \Delta_e^2 x_e x_v}{\Delta_e} \right] \\
 & + \frac{k}{\omega} \dot{y}_e \left[\mu \sin \psi \left(\Delta_e^2 - \Delta_e x_v - \frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v - \Delta_e^2 x_e + \Delta_e x_e x_v}{\Delta_e} \right) + \right. \\
 & \left. + (\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v) - \frac{\Delta_e^4 - \Delta_e^3 x_v - \Delta_e^3 x_e + \Delta_e^2 x_e x_v}{\Delta_e} \right] + \\
 & y_{e+1} \left[\frac{k \mu^2}{2} \sin 2 \psi \frac{\Delta_e^2 - \Delta_e x_v}{\Delta_e} + k \mu \cos \psi \frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v}{\Delta_e} - \right. \\
 & \left. - m \omega^2 \frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_e}{\Delta_e} \right] \\
 & + y_e \left[-\frac{k \mu^2}{2} \sin 2 \psi \frac{\Delta_e^2 - \Delta_e x_v}{\Delta_e} - k \mu \cos \psi \frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_v}{\Delta_e} + \right. \\
 & \left. + m \omega^2 \frac{\Delta_e^3 - \Delta_e^2 x_e}{\Delta_e} - m \omega^2 \Delta_e^2 \right] + m \omega^2 y_v \Delta_e^2 \Big\} \\
 & + \frac{c_v}{R^3 \Delta_v} (2 y_v - y_{v-1} - y_{v+1}), \quad v = 0, 1, \dots, N,
 \end{aligned}$$

womit das aus $(N+1)$ Gleichungen bestehende System der Bewegungsgleichungen für die Knotenpunkte gefunden ist.

5. Transformationen

Durch Einführung der Bezeichnungen $x_{\nu+1} - x_\nu = \Delta_\nu \equiv d$ entsteht zunächst nach einfacher Zwischenrechnung

$$(2) \left\{ \begin{aligned} 0 = & \sum_{\varrho=\nu}^N \left\{ \ddot{y}_{\varrho+1} m d^2 \left(-\frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2} + \frac{\nu}{2} \right) + \ddot{y}_\varrho m d^2 \left(-\frac{1}{6} - \frac{\varrho}{2} + \frac{\nu}{2} \right) \right. \\ & + \dot{y}_{\varrho+1} \frac{k}{\omega} \\ & \left[\mu \sin \psi d^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\varrho}{2} - \frac{\nu}{2} \right) + d^3 \left(\frac{1}{2} \varrho^2 + \frac{2}{3} \varrho + \frac{1}{4} - \frac{\varrho \nu}{2} - \frac{\nu}{3} \right) \right] \\ & + \dot{y}_\varrho \frac{k}{\omega} \\ & \left[\mu \sin \psi d^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{\varrho}{2} - \frac{\nu}{2} \right) + d^3 \left(\frac{1}{2} \varrho^2 + \frac{1}{3} \varrho + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \varrho \nu - \frac{1}{6} \nu \right) \right] \\ & + y_{\varrho+1} \left[k \frac{\mu^2}{2} \sin 2 \psi d \left(\varrho + \frac{1}{2} - \nu \right) + \right. \\ & + k \mu \cos \psi d^2 \left(\varrho^2 + \varrho + \frac{1}{3} - \varrho \nu - \frac{\nu}{2} \right) - m \omega^2 d^2 \left(\frac{\varrho}{2} + \frac{1}{3} \right) \Big] + \\ & + y_\varrho \left[-k \frac{\mu^2}{2} \sin 2 \psi d \left(\varrho + \frac{1}{2} - \nu \right) - \right. \\ & - k \mu \cos \psi d^2 \left(\varrho^2 + \varrho + \frac{1}{3} - \varrho \nu - \frac{\nu}{2} \right) - m \omega^2 d^2 \left(\frac{\varrho}{2} + \frac{1}{6} \right) \Big] \\ & \left. + m \omega^2 y_\nu d^2 \left(\varrho + \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{c_r}{R^3 d} (2 y_\nu - y_{\nu-1} - y_{\nu+1}) \\ & \nu = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right.$$

Hier werden folgende $(N+1, N+1)$ -Matrizen mit den Abkürzungen

$$b_{\nu \varrho} = \varrho^2 + \varrho - \varrho \nu + \frac{1}{6}$$

$$a_{\nu \varrho} = \frac{1}{2} \varrho^2 + \frac{5}{6} \varrho - \frac{1}{2} \varrho \nu - \frac{1}{6} \nu + \frac{1}{4}$$

$$g_{\nu, N+1} = \frac{1}{2} (N+1)^2 + \frac{N+1}{6} - \nu \frac{N+1}{2} + \frac{\nu}{6} - \frac{1}{12}$$

$$j_{\nu+1, \nu} = -\frac{\nu}{2} - \frac{1}{6} + \sum_{\varrho=\nu}^N \left(\varrho + \frac{1}{2} \right).$$

$$e_{\nu \varrho} = -2 \varrho + \nu - 1$$

$$l_{\nu \varrho} = -\varrho^2 - 2 \varrho + \varrho \nu - \frac{5}{6} + \frac{\nu}{2}$$

$$f_{\nu, N+1} = (N+1)^2 - (N+1) \nu + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{6}$$

eingeführt:

$$\mathfrak{A} = -m d^3 \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & N \\ \frac{1}{6} & 1 & 2 & 3 & \cdots & 4 \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \frac{1}{6} & 1 & 2 & 3 \\ & & & \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ & & & & \frac{1}{6} & 1 \\ 0 & & & & & \frac{1}{6} \end{array} \right] \begin{array}{c} \frac{1}{3} + \frac{N}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1^* + \mathfrak{B}_2^*$$

$$\mathfrak{B}_1^* = -\frac{k \mu \sin \psi}{m \omega} \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{B}_2^* = \frac{k}{\omega} d^3 \left[\begin{array}{cccccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ a_{21} & b_{22} & \cdots & b_{N-1, N} \\ 0 & a_{32} & \cdots & b_{NN} \\ & & \cdots & a_{N+1, N} \\ 0 & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} g_{1, N+1} \\ \\ \\ g_{N+1, N+1} \end{array}$$

$$\mathfrak{C}^* = \sum_{v=1}^4 \mathfrak{C}_v^*$$

$$\mathfrak{C}_1^* = \frac{1}{R^3 d}$$

$$\begin{bmatrix} -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 2c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_N & 2c_N \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{C}_2^* = m \omega^2 d^2 \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -N & -\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ j_{21} & -2 & -3 & -N & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -N & -\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -N & -\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & j_{N+1, N} & -\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{C}_3^* = -\frac{k}{2} \mu^2 \sin 2\psi d \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -\left(N + \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{C}_4^* = +k\mu \cos \psi d^2 \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} & f_{1,n+1} \\ l_{21} & e_{22} & \cdots & & \\ 0 & l_{32} & \cdots & e_{nn} & \\ 0 & & \cdots & l_{n+1,n} & f_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

Mit $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}$ läßt sich (2) als übersichtliche Matrizen-
gleichung

$$(3) \quad \ddot{\mathfrak{y}} + \mathfrak{B} \dot{\mathfrak{y}} + \mathfrak{C} \mathfrak{y} = 0$$

schreiben mit den $(N+1, N+1)$ Matrizen \mathfrak{B} und \mathfrak{C} ; für diese gilt

$$\mathfrak{B}(\psi + 2\pi) = \mathfrak{B}(\psi),$$

$$\mathfrak{C}(\psi + 2\pi) = \mathfrak{C}(\psi).$$

Mit der Substitution

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\psi} = \mathfrak{z},$$

dem Vektor

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \mathfrak{z} \\ \mathfrak{y} \end{pmatrix}$$

und der mit mod 2π periodischen $(2N+2, 2N+2)$ -Matrix

$$\mathfrak{G}(\psi) = \begin{pmatrix} -\frac{\mathfrak{B}}{\omega} & \frac{\mathfrak{C}}{\omega^2} \\ \mathfrak{C} & 0 \end{pmatrix}$$

lautet (3) als Differentialgleichung erster Ordnung

$$(4) \quad \frac{d\mathfrak{x}}{d\psi} = \mathfrak{G}(\psi) \mathfrak{x}.$$

6. Stabilitätsbedingungen

Gleichung (4) hat periodische oder abklingende Lösungen je nachdem, ob der Betrag der größten charakteristischen Zahl $|\lambda_{\max}|$ der Matrix

$$(5) \quad \begin{aligned} \Omega_0^{2\pi}(\mathfrak{G}) &= \mathfrak{C} + \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}(\psi_1) d\psi_1 \\ &+ \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}(\psi_1) \int_0^{\psi_1} \mathfrak{G}(\psi_2) d\psi_2 d\psi_1 \\ &+ \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}(\psi_1) \int_0^{\psi_1} \mathfrak{G}(\psi_2) \int_0^{\psi_2} \mathfrak{G}(\psi_3) d\psi_3 d\psi_2 d\psi_1 + \dots \end{aligned}$$

gleich eins oder kleiner als eins ist [5].

Da diese Reihenentwicklung für die hier auftretenden Zahlenwerte schlecht konvergiert, wird die Matrix zweckmäßig nach folgender Aufspaltung berechnet

$$(6) \quad \Omega_0^{2\pi}(\mathfrak{G}) = \Omega_n(\mathfrak{G}) \cdot \Omega_{n-1}(\mathfrak{G}) \dots \Omega_v(\mathfrak{G}) \dots \Omega_2(\mathfrak{G}) \Omega_1(\mathfrak{G})$$

mit den einzelnen Matrizen

$$\Omega_v(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} + \int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi_1) d\psi_1 + \int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi_1) \int_{\varphi_{v-1}}^{\psi_1} \mathfrak{G}(\psi_2) d\psi_2 d\psi_1 + \dots$$

Setzt man innerhalb der Schrittweite $\varphi_v - \varphi_{v-1}$ die Matrix $\mathfrak{G}(\psi)$ konstant [6] durch Einführung des Mittelwertes

$$\mathfrak{G}_v = \frac{1}{\varphi_v - \varphi_{v-1}} \int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi) d\psi,$$

so lautet die Reihenentwicklung für die einzelnen Matrizen von (6)

$$\begin{aligned} \Omega_v &= \mathfrak{G} + \int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi) d\psi + \frac{1}{2} \left[\int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi) d\psi \right]^2 + \frac{1}{6} \left[\int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi) d\psi \right]^3 + \dots \\ &= exp \int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi) d\psi. \end{aligned}$$

7. Zahlenbeispiel

Es sei ein Rotorblatt mit 3 Gelenken untersucht. Dann hat $\mathfrak{G}(\psi)$ die Form

$$(7) \quad \mathfrak{G}(\psi) = \tilde{\mathfrak{Z}}_1 \sin \psi + \tilde{\mathfrak{Z}}_2 \sin 2\psi + \tilde{\mathfrak{Z}}_3 \cos \psi + \tilde{\mathfrak{Z}}_4$$

mit den nur von den Parametern abhängigen Matrizen $\tilde{\mathfrak{Z}}_i$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{Z}}_1 &= \frac{k \mu}{m \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathfrak{Z}}_2 &= \frac{9 k \mu^2}{52 m \omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -14 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{Z}}_3 &= \frac{k \mu}{26 m \omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 & 24 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -108 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathfrak{Z}}_4 &= \frac{k}{156 m \omega^2} \begin{bmatrix} 50 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 102 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 14 & 145 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{81 c}{13 m R^3 \omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -44 & 40 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 46 & -56 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 54 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -362 & 204 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 252 & -296 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 252 & -152 \\ 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Das Integral $\int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi) d\psi$ lautet damit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_v &= \int_{\varphi_{v-1}}^{\varphi_v} \mathfrak{G}(\psi) d\psi = (\cos \varphi_{v-1} - \cos \varphi_v) \tilde{\mathfrak{Z}}_1 + \\
&+ \frac{1}{2} (\cos 2 \varphi_{v-1} - \cos 2 \varphi_v) \tilde{\mathfrak{Z}}_2 + \\
&+ (\sin \varphi_v - \sin \varphi_{v-1}) \tilde{\mathfrak{Z}}_3 + (\varphi_v - \varphi_{v-1}) \tilde{\mathfrak{Z}}_4.
\end{aligned}$$

Für die Rechnung des Beispiels werden folgende Werte für die Parameter gewählt:

$$\begin{aligned}
\rho &= 0,13 \text{ kg sec}^2 \text{m}^{-4} \\
\tau &= 0,047 \\
c_a' &= 5,6 \\
m &= 0,46 \text{ kg sec}^2 \text{m}^{-2} \\
R &= 5,65 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$c = 580 \text{ m kg}$$

$$\omega = 26,6 \text{ sec}^{-1}$$

$$\mu = 0,25$$

$$\varphi_v - \varphi_{v-1} = \frac{2\pi}{16} = 22,5^\circ$$

Die sich nach (6) ergebende charakteristische Matrix $\Omega_0^{2\pi}$ hat den Eigenwert $|\lambda_{\max}| = 0,074$; wegen $|\lambda_{\max}| < 1$ ist die Eigenschlagbewegung stabil.

Für einen willkürlich gewählten Anfangsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,12 \\ 0,24 \\ 0,02 \\ 0,06 \\ 0,12 \end{bmatrix}$$

ist die Bewegung der Blattspitze bei einer Rotordrehung im Bild 3 dargestellt.

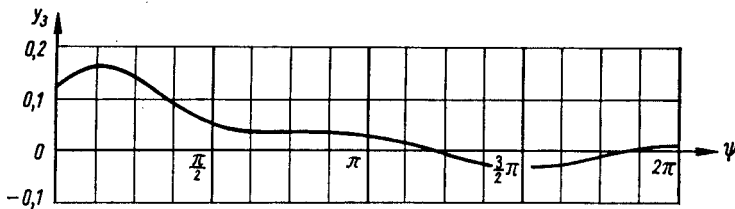


Abb. 3. Bewegung der Blattspitze

Literatur

- [1] *H. Papenhausen*, Dynamische Berechnung eines Rotorblattes. Dissertation Hannover 1948.
- [2] *G. Horvay, Yuan*, Stability of Rotor Blade Flapping Motion. J. Aeron. Sc. 1947, S. 583—593.
- [3] *Y. Shulman*, Stability of a Flexible Helicopter Rotor Blade in Forward Flight. 23rd Annual Meeting of the JAS, New York, Jan. 1955.
- [4] *K. H. Hohenemser*, Selbsterregte Schlagschwingungen von Drehflügeln bei hohem Fortschrittsgrad. Z. angew. Math. Mech. 35 (1955), S. 201—210.
- [5] *W. Schmeidler*, Vorträge über Determinanten und Matrizen. Akademie-Verlag Berlin 1949.
- [6] *R. A. Frazer, Duncan, Collar*, Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations. Cambridge 1938.